1ères S12 et S01

D S n ° 2

- Durée 2 h

- une seule calculatrice autorisée

Barème indicatif :	
Exercice 1 :	**/6 pts**
Exercice 2 :	**/8 pts**
Exercice 3 :	**/4 pts**
Exercice 4 :	**/2 pts**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage ...*

Exercice 1 : (sur 6 points)

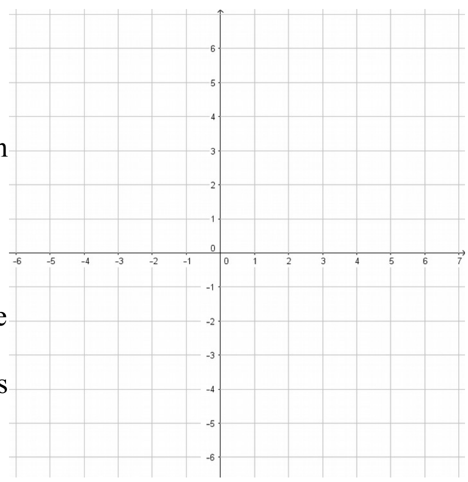
Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. ***Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.***

Rappel: Pour montrer qu'une proposition est vraie, il faut démontrer qu'elle est toujours vraie. Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit souvent de donner un contre-exemple.

Bonus : Dans le plan, deux paraboles de même axe de symétrie vertical s'intersectent toujours en au moins un point.
Proposition 1 : Les paraboles d'équations $y=ax^2+c$ avec a, $c \in \mathbb{R}$, admettent l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
Soit $P : P(x)=ax^2+bx+c$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$. Soit S(α ; β) le sommet de sa parabole représentative et Δ le discriminant de la fonction P .   **Proposition 2 :** Si $\Delta < 0$ et $\alpha < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) < 0$.
On considère le trinôme $f : f(x)=x^2-(m+1)x+4$.   **Proposition 3 :** L'équation $f(x)=0$ n'a aucune solution si et seulement si $m \in]-5 ; 3[$.
Proposition 4 : L'équation $3x^4+x^2-14=0$ admet quatre solutions.

Exercice 2 : (sur 8 points)

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2;2)$, $B(5;6)$ et $C(4;-1)$.



1. Compléter au fur et à mesure la figure ci-contre :
2. a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

   b) Calculer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
4. a) Calculer les coordonnées du point I milieu de [CD].

   b) Montrer que I, M et B sont alignés.
5. a) Calculer les coordonnées du point J milieu de [AB].

   b) Montrer que (DJ) et (BI) sont parallèles. Que peut-on déduire pour le quadrilatère BJDI ?
6. Calculer les coordonnées du point N appartenant à l'axe des ordonnées tel que A, C et N soient alignés.
7. Soit F le point d'intersection des droites (AC) et (IJ).

   a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC).

   b) Montrer que l'équation $14x-2y-13=0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).

   c) Calculer les coordonnées de F.

Exercice 3 : (4 points)

Soit m un réel. Dans un repère du plan, on considère l'ensemble (E_m) des points $M(x\,;y)$ tels que : $m^2x-(m-1)y-1=0$.

1. Pourquoi l'ensemble (E_m) est-il toujours une droite du plan ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m, la droite (E_m) passe-t-elle par le point $A(-1\,;1)$?
3. Parmi les droites (E_m), y a-t-il des droites parallèles à l'axe des abscisses ? Si oui, les déterminer.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de m, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ est-il un vecteur directeur de la droite (E_m) ?
5. La droite (E_m) peut-elle être parallèle à la droite (D) d'équation $5x-3y+4=0$? Justifier.

Exercice 4 : (2 points)

Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel qui permettrait, connaissant les coordonnées $(x_M\,;y_M)$ d'un point M et une équation cartésienne $ax+by+c=0$ d'une droite (d), de déterminer si le point M appartient à la droite (d) ou non et d'afficher une équation de la droite parallèle à (d) passant par M dans le cas où M n'appartient pas à (d).

Variables	*x*M, *y*M, *a*, *b*, *c et c'* sont des réels avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$
Initialisation	Lire *x*M, *y*M, *a*, *b*, *c,d*

Traitement	si (…………………………………………………)
	    afficher (« M appartient à (d) »)
	finsi
	sinon
	    afficher (« M n'appartient pas à (d) »)
	    d= ……………………..
	    afficher (« La droite parallèle à (d) passant par M a pour équation », … , «x+», …. ,«y+», …. ,«=0»)
	finsinon

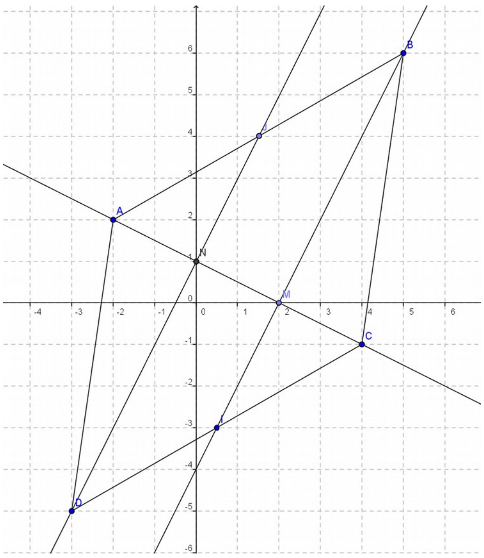
Note : Dans l'affichage, pour que les variables soient bien interprétées, il est nécessaire de les afficher en dehors des guillemets.

Exercice 1 : **(sur 6 points)**

Proposition 1 : VRAI : Chaque parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x=-\frac{b}{2a}$ or $b=0$ donc l'axe de symétrie a pour équation : $x=0$, c'est donc bien l'axe des ordonnées.
Proposition 2 : FAUX : contre-exemple : $P: P(x)=x^2+2x+2:$ $\Delta=-4<0$ et $\alpha=-\frac{2}{2}=-1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)>0$.
Proposition 3 : VRAI : $\Delta=(-(m+1))^2-4\times1\times4=(m+1)^2-4^2=(m+5)(m-3)$. L'équation n'admet aucune solution si et seulement si $\Delta<0$. Or le trinôme $(m+5)(m-3)$ admet pour racines -5 et 3 et comme $a>0$ alors il est strictement négatif sur $]-5;3[$.
Proposition 4 : On pose $X=x^2$. L'équation devient $3X^2+X-14=0$. $\Delta=1+3\times4\times14=169$, on obtient $X_1=\frac{-1-13}{6}=-\frac{7}{3}$ et $X_2=\frac{-1+13}{6}=2$. L'équation $x^2=-\frac{7}{3}$ n'admet pas de solution et l'équation $x^2=2$ admet deux solutions. L'affirmation est donc fausse.

Exercice 2 : **(sur 7 points)**

1.



2. a) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-(-2)\\-1-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$.

b) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times6\\\frac{1}{3}\times(-3)\end{pmatrix}$, soit $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}x_C-x_M\\y_C-y_M\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}4-x_M\\-1-y_M\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, on doit résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases}4-x_M=2\\-1-y_M=-1\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}-x_M=2-4\\-y_M=-1+1\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x_M=2\\y_M=0\end{cases}$. M(2 ; 0).

3. ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-(-2)\\6-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$.

et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4-x_D\\-1-x_D\end{pmatrix}$.

On a donc : $\begin{cases}4-x_D=7\\-1-x_D=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x_D=7-4\\-y_D=4+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D=-3\\y_D=-5\end{cases}$, $D(-3;-5)$.

4. a) $\mathrm{I}\left(\frac{x_\mathrm{C}+x_\mathrm{D}}{2};\frac{y_\mathrm{C}+y_\mathrm{D}}{2}\right)$ soit $\mathrm{I}\left(\frac{4-3}{2};\frac{-1-5}{2}\right)$ donc $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2};-3\right)$.

   b) I, M et B sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ sont colinéaires.

   Or $\overrightarrow{\mathrm{IM}}\begin{pmatrix}x_\mathrm{M}-x_\mathrm{I}\\y_\mathrm{M}-y_\mathrm{I}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{IM}}\begin{pmatrix}2-\frac{1}{2}\\0-(-3)\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\mathrm{IM}}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}$

   et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\begin{pmatrix}x_\mathrm{B}-x_\mathrm{M}\\y_\mathrm{B}-y_\mathrm{M}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\begin{pmatrix}5-2\\6-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

   $x_{\overrightarrow{\mathrm{IM}}}\times y_{\overrightarrow{\mathrm{MB}}}-x_{\overrightarrow{\mathrm{MB}}}\times y_{\overrightarrow{\mathrm{IM}}}=\frac{3}{2}\times 6-3\times 3=0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ sont colinéaires, et les points I, M et B sont alignés.

5. a) $J\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$, $J\left(\frac{-2+5}{2};\frac{2+6}{2}\right)$, $J\left(\frac{3}{2};4\right)$.

   b) (DJ) et (BI) sont parallèles ssi $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires.

   Or $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}x_J-x_D\\y_J-y_D\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-(-3)\\4-(-5)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\9\end{pmatrix}$

   et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}x_I-x_B\\y_I-y_B\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-5\\-3-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\-9\end{pmatrix}$.

   Or $x_{\overrightarrow{DJ}}\times y_{\overrightarrow{BI}}-y_{\overrightarrow{DJ}}\times x_{\overrightarrow{BI}}=\frac{9}{2}\times(-9)-9\times\left(-\frac{9}{2}\right)=-\frac{36}{2}+\frac{36}{2}=0$, donc $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires, soit (DJ)// (BI). Comme ABCD est un parallélogramme et que
   I ∈ [DC] et J ∈ [AB], (BJ)//(DI). Or (DJ)//(BI), donc JBID est un parallélogramme.

6. Comme N appartient à l'axe des ordonnées, $x_N=0$. Comme A, C et N sont alignés, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires, soit $x_{\overrightarrow{AC}}\times y_{\overrightarrow{AN}}-y_{\overrightarrow{AC}}\times x_{\overrightarrow{AN}}=0$.

   Or $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x_N-x_A\\y_N-y_A\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}0-(-2)\\y_N-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}2\\y_N-2\end{pmatrix}$.

   On a donc $x_{\overrightarrow{AC}}\times y_{\overrightarrow{AN}}-y_{\overrightarrow{AC}}\times x_{\overrightarrow{AN}}=6\times(y_N-2)-(-3)\times 2=0$, donc $6y_N-12+6=0$, soit $y_N=1$. N(0 ; 1).

7. a) Comme $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est un vecteur directeur de (AC), il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que (AC) : $-3x-6y+c=0$. Or A ∈ (AC), donc ses coordonnées vérifient l'équation cherchée, donc $-3x_\mathrm{A}-6y_\mathrm{A}+c=0$ soit $-3\times(-2)-6\times 2+c=0$, donc $c=6$.

   (AC) : $-3x-6y+6=0$, ou encore $x+2y-2=0$.

   b) $14x_\mathrm{I}-2y_\mathrm{J}-13=14\times\frac{1}{2}-2\times(-3)-13=0$, donc les coordonnées de I vérifient l'équation donnée. On vérifie de même pour J. Comme I ≠ J, l'équation donnée convient.

   c) Pour déterminer les coordonnées de F, on résout le système d'équations suivant : $\begin{cases}x+2y-2=0\\14x-2y-13=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=-2y+2\\14(-2y+2)-2y-13=0\end{cases}$

$\begin{cases}x+2y-2=0\\14x-2y-13=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-28y+28-2y-13=0\\x=-2y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}\\x=1\end{cases}$. $\mathrm{F}\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 3 : (3,5 points)

1. $m^2x-(m-1)y-1=0$ est l'équation cartésienne d'une droite **si** $m^2\neq 0$ **ou bien** $m-1\neq 0$ **,** soit $m\neq 0$ ou $m\neq 1$, ce qui est toujours réalisé.
2. $A\in(E_m)$ ssi $m^2\times(-1)-(m-1)\times 1-1=0$ ssi $-m^2-m+1-1=0$ ssi $-m^2-m=0$ $A\in(E_m)$ ssi $m=0$ ou $m=-1$.

   Les valeurs de m pour lesquelles la droite (E_m) passe par A sont $m = 0$ et $m = -1$.

3. (E_m) est parallèle à l'axe des abscisses lorsque le coefficient devant "x" dans l'équation cartésienne est nul, c'est-à-dire lorsque $m^2=0$, soit $m=0$. L'équation est alors $y-1=0$.
4. Un vecteur directeur de la droite (E_m) est $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} m-1 \\ m^2 \end{pmatrix}$.

   $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $1\times m^2-4\times(m-1)=0$ $\Leftrightarrow$ $m^2-4m+4=0$.
   $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $(m-2)^2=0$ $\Leftrightarrow$ $m=2$.
5. Un vecteur directeur de la droite (D) est $\vec{w}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $3m^2-5(m-1)=0$ $\Leftrightarrow$ $3m^2-5m+5=0$.
   $\Delta=25-4\times3\times5<0$ donc l'équation n'a pas de solution.
   Il n'existe donc pas de valeur de m pour laquelle (E_m) est parallèle à (D).

Exercice 4 :

Variables	xM, yM, a, b, c *et* c' sont des réels avec $(a;b)\neq(0;0)$
Initialisation	Lire xM, yM, a, b, c
Traitement	si (a*xM+b*yM+c==0) afficher (« M appartient à (d) ») finsi sinon afficher (« M n’appartient pas à (d) ») c'= -(a*xM+b*yM) afficher (« La droite parallèle à (d) passant par M a pour équation »,a, «x+»,b,«y+»,c',«=0») finsinon