1ères S12 et S01 **D S n ° 1**

- Durée 1 h

- une seule calculatrice autorisée

Barème indicatif :	Nom :
Exercice 1 : /4 pts	
Exercice 2 : /5 pts	
Exercice 3 : /6 pts	Prénom :
Exercice 4 : /5 pts	

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage ...*

Exercice 1 :

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{4\}$ par $f(x)=8x-4+\dfrac{2x-1}{x-4}$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{4\}$, $f(x)=\dfrac{8x^2-34x+15}{x-4}$.

2. Étudier le signe de $f(x)$.

3. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x)\leq 0$.

Exercice 2 :

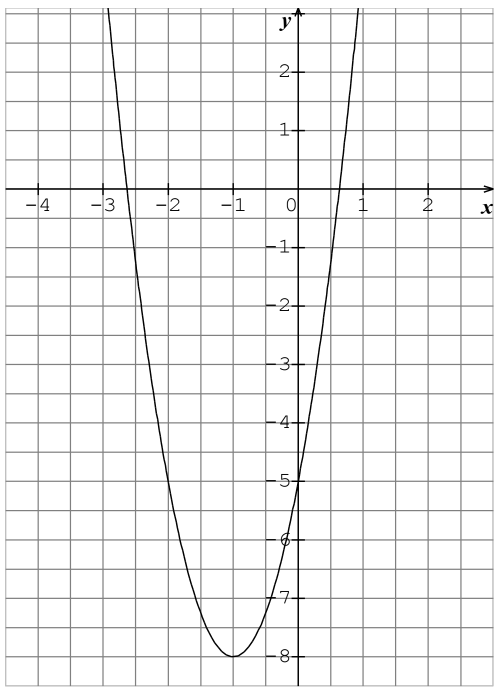
Soit P le polynôme de degré 3 défini par $P(x)=x^3-6x^2-13x+42$.

1. Démontrer que 2 est une racine de P.

2. On peut alors factoriser P comme suit : $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$, avec a, b et c réels, $a\neq 0$. Calculer les valeurs de a, b et c.

3. Factoriser P.

Exercice 3 :



Soit (P) la parabole tracée ci-contre.
(P) est la représentation graphique de f : $f(x)=3x^2+6x-5$.

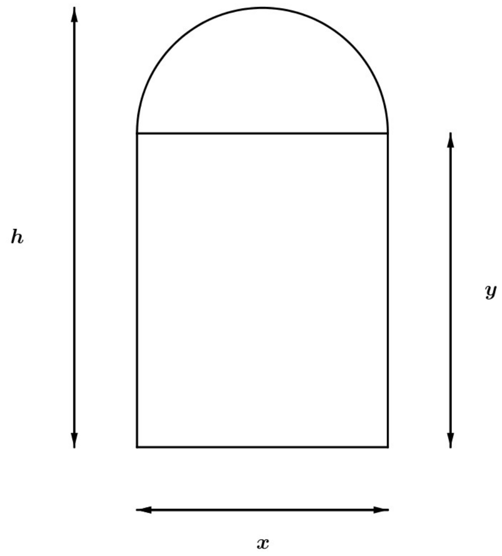
1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (P) avec l'axe des abscisses. Donner les valeurs exactes.

2. Tracer sur le graphique de la feuille la droite (D) d'équation $y=x-3$.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $3x^2+6x-5\leq x-3$.
   Remarque : $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{8}{3}$.

4. Retrouver le résultat de la question précédente par le calcul.

Exercice 4 :



Une porte est constituée :

- d'un battant rectangulaire de hauteur notée y, de largeur notée x.
- d'un cintre semi - circulaire.

La hauteur totale de la porte est h = 2,6 m et l'aire du battant rectangulaire est égale à 2,4 m^2 .

Quelle est la largeur de la porte ?

Correction DS 1 :

Exercice 1 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x)=\dfrac{(8x-4)(x-4)+2x-1}{x-4}=\dfrac{8x^2-34x+15}{x-4}$. Calculons le discriminant du numérateur : $\Delta=b^2-4ac=676=26^2>0$, donc le numérateur admet deux racines distinctes: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{15}{4}$.

Les solutions de l'équation $8x^2-34x+15=0$ sont donc : $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{15}{4}$.

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		4		$+\infty$
$2x^2-10x+15$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	$a>0$
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Ainsi $f(x)\leq 0 \iff x\in\left]-\infty;x_1\right]\cup\left[x_2;4\right[$.

Exercice 2 :

1) $P(2)=2^3-6\times 2^2-3\times 2+42=0$.

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

Ainsi, par identification $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$, ssi :

$$\begin{cases}a=1\\ b-2a=-6\\ c-2b=-13\\ -2c=42\end{cases} \iff \begin{cases}a=1\\ b=-4\\ c=-21\end{cases}.$$

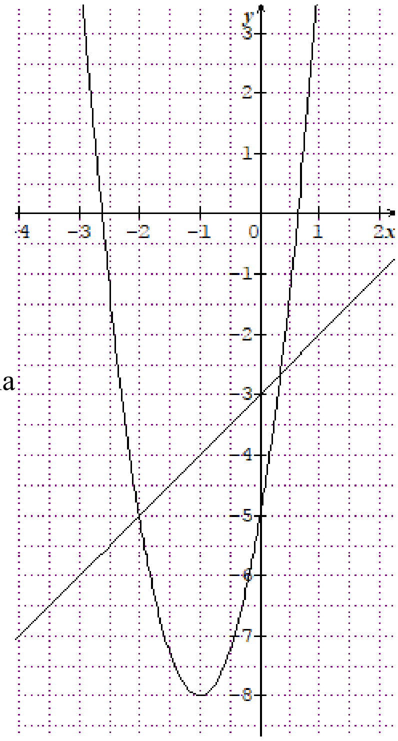
Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=(x-2)(x^2-4x-21)$

3) On note $Q(x)=x^2-4x-21$

$\Delta=100$. $\Delta>0$, donc Q admet deux racines distinctes : $x_1=\dfrac{4-10}{2}=-3$ et $x_2=\dfrac{4+10}{2}=7$

Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$, $Q(x)=(x+3)(x-7)$ et $P(x)=(x-2)(x+3)(x-7)$.

Exercice 3 :



1. On résout l'équation $f(x)=0$, c'est à dire $3x^2+6x-5=0$: $\Delta=96>0$, donc l'équation admet 2 solutions : $x_1=\dfrac{-6-4\sqrt{6}}{6}=\dfrac{-3-2\sqrt{6}}{3}$ et $x_2=\dfrac{-3+2\sqrt{6}}{3}$.

Les coordonnées des points d'intersection de P avec l'axe des abscisses sont donc : $\left(\dfrac{-3-2\sqrt{6}}{3};0\right)$ et $\left(\dfrac{-3+2\sqrt{6}}{3};0\right)$.

2.

3. $3x^2+6x-5\leqslant x-3$: les solutions sont les abscisses des points de P situés sous la droite D donc $S=[-2;\frac{1}{3}]$.

4. $3x^2+6x-5\leqslant x-3 \iff 3x^2+5x-2\leqslant 0$. Le trinôme $3x^2+5x-2$ a pour discriminant

$\Delta=49>0$, et donc 2 racines : -2 et $\dfrac{1}{3}$.

$a=3>0$, donc le trinôme $3x^2+5x-2$ est négatif entre ses racines, d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation : $S=\left[-2;\dfrac{1}{3}\right]$.

Exercice 4 :

x est la largeur de la porte. La hauteur du battant rectangulaire est $y=h-\frac{x}{2}$ car le cintre a pour hauteur $\frac{x}{2}$.

L'aire du battant rectangulaire est donc : $x\left(2{,}6-\frac{x}{2}\right)$.

On résout l'équation $x\left(2{,}6-\frac{x}{2}\right)=2{,}4$

$$2{,}6x-\frac{x^2}{2}=2{,}4$$

$$x^2-5{,}2x+4{,}8=0$$

$\Delta=(-5{,}2)^2-4\times 1\times 4{,}8=27{,}04-19{,}2=7{,}84=2{,}8^2$,

D'où 2 solutions pour x : $x_1=\frac{5{,}2-2{,}8}{2}=1{,}2$ et $x_2=\frac{5{,}2+2{,}8}{2}=4$.

La porte ne peut pas avoir une largeur de 4 m car sa hauteur serait 0,6 m ce qui est un peu bas !

On prendra une largeur de 1,2 m.