Exercice 1 : (4 points)

1. On peut construire un diagramme de Venn ou un tableau à double entrée :*

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,1	0,2	0,3
$\overline{B}$	0,5	0,2	0,7
Total	0,6	0,4	1

2. a) $p(A\cap B)$ = 0,1
   b) $p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B) = 0{,}6+0{,}3-0{,}1=0{,}8$
   c) $p(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0{,}2$

Exercice 2 : (3 points)

On lance un dé cubique pipé, sans équiprobabilité d'apparition de chaque face. Les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par P_n la probabilité de voir apparaître, sur le dessus, la face marquée du nombre « *n* » $(1\leqslant n\leqslant 6)$.

On sait que $P_1=\frac{1}{12}$ et que, pour tout *n* élément de {1,2,3,4,5,6}, on a : $P_{n+1}=P_n+r$, où *r* est une constante réelle fixée.

1. $P_1=P_1+0\times r$, $P_2=P_1+1\times r$, $P_3=P_2+r=P_1+1\times r+r=P_1+2\times r$,
   $P_4=P_3+r=P_1+2\times r+r=P_1+3\times r$, $P_5 = P_4+r=P_1+4r$ *et* $P_6=P_5+r=P_1+5r$.
2. a) $S=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6=P_1+P_1+r+P_1+2r+P_1+3r+P_1+4r+P_1+5r=6P_1+15r$.
   b) La somme des probabilités doit être égale à 1, donc $S=1$, soit $6P_1+15r=1$. On sait que $P_1=\frac{1}{12}$,
   donc $\frac{6}{12}+15r=1 \Leftrightarrow 15r=\frac{1}{2} \Leftrightarrow r=\frac{1}{30}$.
   On en déduit que $P_2=\frac{7}{60}$, $P_3=\frac{3}{20}$, $P_4=\frac{11}{60}$, $P_5=\frac{13}{60}$ et $P_6=\frac{1}{4}$.
3. La probabilité d'obtenir un nombre pair est donc : $P_2+P_4+P_6=\frac{11}{20}$

Exercice 3 : (5 points)

1. a) La loi de probabilité de *X* est :

x_i	$10x^2=40$	$3\times 10x=60$	$-10x^3=-80$
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$

   b) Le gain moyen du jeu est l'espérance de la variable aléatoire *X* :

$E(X)=40\times\frac{2}{8}+60\times\frac{5}{8}+(-80)\times\frac{1}{8}=37.5$. Le gain moyen du jeu est de 37,50Dhs.

2. a) La loi de probabilité de *X* est :

x_i	$10x^2$	$30x$	$-10x^3$
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$

   Le gain moyen, en fonction de *x*, est donné par :

$$E(X)=10x^2\times\frac{2}{8}+30x\times\frac{5}{8}+10(-x^3)\times\frac{1}{8}=\frac{10}{8}(2x^2+15x-x^3)=f(x)$$.

   Trouver la valeur de *x* pour laquelle le gain moyen est maximal revient donc à étudier l'existence d'un maximum pour la fonction *f*.

   b) *f* est une fonction polynomiale, donc elle est dérivable sur son ensemble de définition.

$f'(x)=\frac{5}{4}(-3x^2+4x+15)$ est une fonction trinôme du second degré.

   On cherche le discriminant de $-3x^2+4x+15$: $\Delta=16+4315=196=14^2>0$,

$\Delta > 0$ donc le trinôme possède deux racines : $x_1 = \frac{-4-14}{2\times(-3)} = 3 > 0$ et $x_2 = \frac{-4+14}{-6} = -\frac{5}{3} < 0$.

Le coefficient dominant de f' étant négatif, on en déduit le tableau de signes de f' :

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
Variations de f		↗	*Max*	↘	

c) *f* admet donc un maximum en $x_0 = x_1 = 3$, égal à : $Max = f(3) = \frac{5}{4}(-3^3 + 2\times 3^2 + 15\times 3) = 45\,Dhs$

Le gain moyen maximal du jeu est donc de 45Dhs.

<u>Exercice 4 :</u> (3 points)

- $EB = AB - AE = 7 - 4 = 3$

  Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, de sens contraires, donc :
  $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{CD} = -EB\times CD = -3\times 4 = -12$
- Le triangle DAC est isocèle et rectangle en D, donc $\widehat{DAC} = 45^\circ$ et $AC = \sqrt{2}\times DC = 4\sqrt{2}$
  $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = -AD\times AC\times\cos(\widehat{DAC}) = -4\times 4\sqrt{2}\times\cos(45) = -16\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = -16$
- AECD est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux. $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$.
- E est le projeté orthogonal de C sur (BA). Donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA} = 3\times 7 = 21$.
- Dans le repère orthonormé (A ; $\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$; $\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$), $C(4;4)$, $D(0;4)$ et $B(7;0)$.
  $\overrightarrow{CD}(-4;0)$ et $\overrightarrow{CB}(3;-4)$. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} = x_{\overrightarrow{CD}}\times x_{\overrightarrow{CB}} + y_{\overrightarrow{CD}}\times y_{\overrightarrow{CB}} = 3\times(-4) + 0\times(-4) = -12$.
- D est le projeté orthogonal de C sur (DA) et A est le projeté orthogonal de B sur (DA). Donc $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA} = 4\times 4 = 16$.

<u>Exercice 5 :</u> (5 points)

1. a) $\widehat{BAE} = \widehat{CAG} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BAE} + \widehat{EAG} + \widehat{CAG} + \widehat{BAC} = 2\pi$. Donc $\widehat{EAG} + \widehat{BAC} = 2\pi - 2\times\frac{\pi}{2}$,
   $\widehat{EAG} + \widehat{BAC} = \pi$. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG} = \|\overrightarrow{AE}\|\times\|\overrightarrow{AG}\|\times\cos(\widehat{EAG})$.
   Or $\|\overrightarrow{AE}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ car ABDE est un carré $\|\overrightarrow{AG}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ car ACFG est un carré. $\widehat{EAG} = \pi - \widehat{BAC}$.
   Donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\pi - \widehat{BAC})$. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG} = -\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{BAC})$ car $\cos(\pi - \widehat{BAC}) = -\cos(\widehat{BAC})$, donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
   b) $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$.
   $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$. Or $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2}$ donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG} = 0$, et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$ donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$. $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BG} = 0 - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG} + 0$. Or d'après la question 1. a), $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$, d'où $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BG} = 0$.
   On en conclut que $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont orthogonaux et que les droites (EC) et (BG) sont perpendiculaires.
2. a) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AE}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{EAC})$, or $\|\overrightarrow{AE}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ car ABDE est un carré. $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AG}\|$ car ACFG est un carré, $\widehat{EAC} = \widehat{EAB} + \widehat{BAC}$ (relation de Chasles pour les angles)
   $\widehat{EAC} = \widehat{CAG} + \widehat{BAC}$ car $\widehat{EAB} = \widehat{CAG}$, donc $\widehat{EAC} = \widehat{BAG}$.
   Donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AG}\|\times\cos(\widehat{BAG})$ et $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$.
   b) $EC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE}^2 = AC^2 + AE^2 - 2\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$
   $BG^2 = (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AG}^2 - 2\times\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = AG^2 + AB^2 - 2\times\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}$
   or $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$ et $AC = AG$, $AE = AB$. Donc $BG^2 = AC^2 + AE^2 - 2\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} = EC^2$,
   Soit $BG = EC$.