1èreS **Devoir Surveillé n ° 6** - Durée 1 h - Calculatrices autorisées	**Barème :** **1)** *4 pts* **2)** 6 *pts* **3)** 4 *pts* **4)** 6 *pts*	**Nom :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

DERIVATION - APPLICATION DE LA DERIVATION

Ex 1 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant pour chaque fonction l'ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivable.

$f(x)=(x-5)(x^4-1)$

$g(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

Ex 2 :

Soit f la fonction définie sur $[-5;3]$ par $f(x)=-\dfrac{x^4}{4}+8x^2-2$

1) Étudier les variations de f

2) Déterminer le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sur $[-5;3]$

3) Déterminer le meilleur encadrement possible de $|f(x)|$ sur $[-5;3]$

Ex 3 :

On considère une série statistique de p valeurs discrètes, x_1, x_2, … , x_p, pondérées par les effectifs n_1, n_2 , … , n_p.
On appelle N l'effectif total et $\overline{x}$ la moyenne.

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sum_{i=1}^{i=p} n_i(x_i-x)^2$.

a) Montrer que pour tout x, $f'(x)=2N(x-\overline{x})$

b) Déterminer la valeur de x qui minimise f.

Ex 4 :

1) Soit g la fonction définie sur $]-4\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3+6x^2+1.$$

a) Déterminer les variations de g sur son ensemble de définition.

b) En déduire le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur $]-4\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^3-2}{x+4}.$$

a) Déterminer $f'(x)$.

b) À l'aide de la question **1)**, en déduire les variations de f.

Correction

Ex 1 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant pour chaque fonction l'ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivable.

$f(x)=(2\mathrm{x}-10)(x^4-1)$

$g(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

f est une fonction polynomiale, elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ on a $f'(x)=10\,x^4-40\,x^3-2$

$\Delta<0$, donc x^2+x+1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$.

g est une fonction rationnelle, elle est donc définie sur son ensemble de définition.

$\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $g'(x)=\dfrac{2\,x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$

Ex 2 :

Soit f la fonction définie sur $[-5;3]$ par $f(x)=-\dfrac{x^4}{4}+8x^2-2$

1) Étudier les variations de f

2) Déterminer le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sur $[-5;3]$

3) Déterminer le meilleur encadrement possible de $|f(x)|$ sur $[-5;3]$

f est dérivable sur $[-5;3]$ et pour tout $x\in[-5;3]$, $f'(x)=-x^3+16x=x(16-x^2)$

x	-5		-4		0		3
x		-	0	-	0	+	
$16-x^2$		-	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	41,75	$\nearrow$	62	$\searrow$	-2	$\nearrow$	49,75

Si $x\in[-5;3]$, on a $-2\leqslant f(x)\leqslant 62$

On en déduit que $0\leqslant|f(x)|\leqslant 62$

Ex 3 :

On considère une série statistique de p valeurs discrètes, $x_1, x_2, \dots, x_p$, pondérées par les effectifs $n_1, n_2, \dots, n_p$.
On appelle N l'effectif total et $\bar{x}$ la moyenne.

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sum_{i=1}^{i=p} n_i(x_i-x)^2$.

a) Montrer que pour tout x, $f'(x)=2N(x-\bar{x})$

b) Déterminer la valeur de x qui minimise f.

a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions polynômes.

$f'(x)=\sum_{i=1}^{p}-2n_i(x_i-x)=-2\sum_{i=1}^{p}n_ix_i+2x\sum_{i=1}^{p}n_i$

$=-2N\bar{x}+2xN=2N(x-\bar{x})$.

b. $f'(x)$ est du signe de $(x-\bar{x})$ donc f atteint son minimum en $x=\bar{x}$.

x	$-\infty$		$\bar{x}$		$+\infty$
signe de f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ex 4 :

1) Soit g la fonction définie sur $]-4\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3+6x^2+1.$$

a) Déterminer les variations de g sur son ensemble de définition.

b) En déduire le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur $]-4\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^3-2}{x+4}.$$

a) Déterminer $f'(x)$.

b) À l'aide de la question **1)**, en déduire les variations de f.

1) a) g est une fonction polynomiale . Elle est donc dérivable sur son ensemble de définition.
Pour tout $x\in]-4\,;+\infty[$, $g'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$

x	-4		0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
g	33	$\searrow$	1	$\nearrow$	

b) Pour tout $x\in]-4\,;+\infty[$, $g(x)\geqslant 1>0$

2) b) f est une fonction rationnelle . Elle est donc dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout $x \in]-4\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3x^2(x+4) - (x^3 - 2)}{(x+4)^2} = \dfrac{3x^3 + 12x^2 - x^3 + 2}{(x+4)^2} = \dfrac{2x^3 + 12x^2 + 2}{(x+4)^2} \equiv \dfrac{2g(x)}{(x+4)^2}$

Pour tout $x \in]-4\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $]-4\,;+\infty[$.