1ère **Devoir surveillé n° 3**

- Durée 1h30
- Calculatrices de lycée autorisées

Barème : **1)** 12 pts **2)** 4 pts **3)** 4 pts	**Nom :**

Ex 1 : D'après ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Baccalauréat Asie 12 juin 2025

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} dans cet exercice.
« Le virus du chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005, une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien et notamment l'île de La Réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ». (https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya) Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :
- la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de 0,999
- la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de 0,005

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible. Un individu est choisi au hasard dans cette population.
On appelle :
- M l'évènement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya »
- T l'évènement : « le test de l'individu choisi est positif »

On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à 0,95.

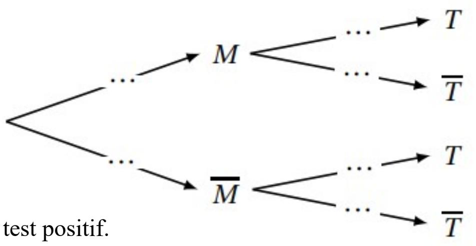
Partie A : Étude d'un exemple

1) Donner les probabilités $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

« En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'île de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission virale durant l'hiver austral. Au total, 270000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750000 individus ». (https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya) Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion. Dans cette partie, la population cible est donc la population de l'île de La Réunion.

2) Donner la valeur exacte de P(M).

3) Compléter l'arbre pondéré donné ci-contre.



4) Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.

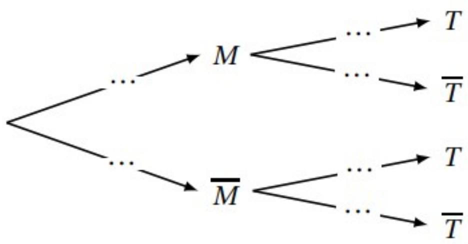
5) Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.

6) Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.

7) Peut-on estimer que ce test est fiable ? Argumenter

Partie B : Dépistage sur une population cible . Dans cette partie, on note p la proportion de personnes atteintes par le virus du chikungunya dans une population cible. On cherche ici à tester la fiabilité du test de ce laboratoire en fonction de p .

1) Adapter, l'arbre pondéré de la question A) 3) en tenant compte des nouvelles données.



2) Exprimer la probabilité P(T) en fonction de p .

3) Exprimer $P_T(M)$ en fonction de p

4) Pour quelles valeurs de p peut-on considérer que ce test est fiable ?

Ex 2 :

Pierre participe à deux loteries . Pour la première, la probabilité de gagner est de $\frac{1}{3}$ et pour la deuxième la probabilité de gagner est de $\frac{1}{4}$.
Les événements G_1 : « gagner à la première loterie » et G_2 : « gagner à la deuxième loterie » sont indépendants.
Quelle est la probabilité que Pierre :

Pour chaque question, j'attends une expression littéral, puis le calcul.

1) gagne aux deux loteries ?

2) gagne seulement à la première loterie ?

3) ne gagne à aucune des loteries ?

4) gagne au moins à une des deux loteries.

Ex 3 :

Dans une urne sont placées 200 boules jaunes dont 120 portent le numéro 0 et 80 portent le numéro 1.

On ajoute dans cette urne 30 boules bleues numérotées 0.

Combien de boules bleues portant le numéro 1 faut-il ajouter dans l'urne pour que les événements J: « la boule est jaune » et Z: « la boule est numérotée 0» soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'une boule de cette urne ?

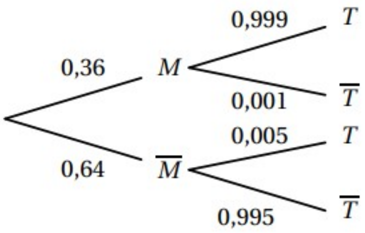
Aide : On note x le nombre de boules bleues portant le numéro 1 à ajouter.

Correction :

Ex 1 : D'après ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Baccalauréat Asie 12 juin 2025

Partie A : Étude d'un exemple

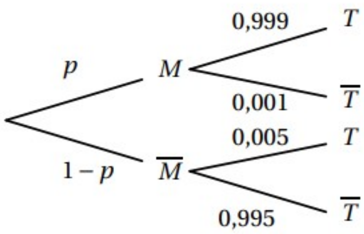
1. D'après l'énoncé : $P_M(T) = 0{,}999$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}005$
2. 270 000 personnes ont été infectées sur 750 000 donc $P(M) = \dfrac{270\,000}{750\,000} = 0{,}36$
3. Voici l'arbre pondéré complété :



4. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}36 \times 0{,}999 = 0{,}35964$
donc la probabilité que l'individu soit atteint et que le test soit positif est 0,36 à 10^{-3} près.
5. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap T) = 0{,}36\times 0{,}999+0{,}64\times 0{,}005 = 0{,}35964+0{,}0032 = 0{,}36284$
donc la probabilité que l'individu ait un test positif est 0,363 à 10^{-3} près.
6. $P_T(M) = \dfrac{P(M\cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}35964}{0{,}36284} \approx 0{,}991$
7. Puisque $P_T(M) \approx 0{,}991 > 0{,}95$, le test est considéré comme fiable.

Partie B : Dépistage sur une population cible

1. Voici l'arbre pondéré complété :



2. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap T) = p\times 0{,}999+(1-p)\times 0{,}005 = 0{,}999p+0{,}005-0{,}005p = 0{,}994p+0{,}005$
3. $P_T(M) = \dfrac{P(M\cap T)}{P(T)} = \dfrac{p\times 0{,}999}{0{,}994p+0{,}005}$
4. Le test est fiable si $P_T(M) > 0{,}95$:
$\dfrac{0{,}999p}{0{,}994p+0{,}005} > 0{,}95 \iff 0{,}999p > 0{,}95(0{,}994p+0{,}005) \iff 0{,}999p > 0{,}9443p + 0{,}00475 \iff 0{,}0547p > 0{,}00475 \iff p > \dfrac{0{,}00475}{0{,}0547} \approx 0{,}087$ donc, le test est fiable si $p > 0{,}087$ (soit 8,7%).

<u>Ex 2 :</u> **Exercice issu (question 1, 2 et 3) de la fiche d'exercices**

1) $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P(G_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

2) $P(G_1 \cap \overline{G_2}) = P(G_1)P(\overline{G_2}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

3) $P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}) = P(\overline{G_1})P(\overline{G_2}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

4) $P(G_1 \cup G_2) = P(G_1) + P(G_2) - P(G_1 \cap G_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

<u>Ex 3 :</u> **Exercice adapté de l'exercice 24 de la fiche d'exercices**

Après avoir ajouter les x boules dans l'urne, il y a $230+x$ boules, toutes équiprobables.

$P(J) = \frac{200}{230+x}$, $P(Z) = \frac{150}{230+x}$ et $P(J \cap Z) = \frac{120}{230+x}$

J et Z sont indépendants si et seulement si :

$$\begin{aligned}
P(J \cap Z) = P(J) \times P(Z) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{120}{230+x} = \frac{200}{230+x} \times \frac{150}{230+x} \\
&\Leftrightarrow \quad 230+x = \frac{200 \times 150}{120} \\
&\Leftrightarrow \quad 230+x = 250 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 20
\end{aligned}$$