1ère **Devoir surveillé n ° 2**

- Durée 1h30
- Calculatrices de lycée autorisées

Barème : **1)** 5 pts **2)** 6 pts **3)** 4 pts **4)** 5 pts **5)** 4 pts	**Nom :**

Ex 1 : Vrai ou faux (réponse juste : + 0,5 / réponse fausse : -0,5 / pas de réponse : 0)

		Réponses
1	Si $u_5 > u_4 > u_3 > u_2 > u_1 > u_0$, alors (u_n) est strictement croissante.	
2	Si (u_n) est positive, alors (u_n) est monotone.	
3	Une suite croissante est toujours minorée.	
4	Une suite peut être à la fois croissante et majorée.	
5	Si une suite (u_n) est décroissante alors $u_{1000} > u_{100} > u_{10}$	
6	Si une suite (u_n) est croissante alors $u_{-2} < u_{-1}$	
7	Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Si (u_n) est décroissante, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.	
8	Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est décroissante.	
9	Un suite qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ est forcément croissante.	
10	Une suite croissante peut avoir une limite égale à -1000.	

Ex 2 : Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = u_n + 7n^2 - 6n + 5$

2) $u_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$

3) $u_n = \frac{2}{7^n}$

Ex 3 : Dans chacun des cas, indiquer si la suite est minorée, majorée ou bornée.

1) $u_n=(3+(-1)^n)\times(5+(-1)^n)$

2) $u_n=\dfrac{n^2}{n^2+2}$

Ex 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+5}-x$ et la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1) a) Compléter le programme ci-dessous permettant de calculer un terme quelconque de la suite.

```
from math import *
def f(x):
  return(........................)
def terme(n):
  u=1
  for i in range(1,.........):
    u=...............
  return(u)
```

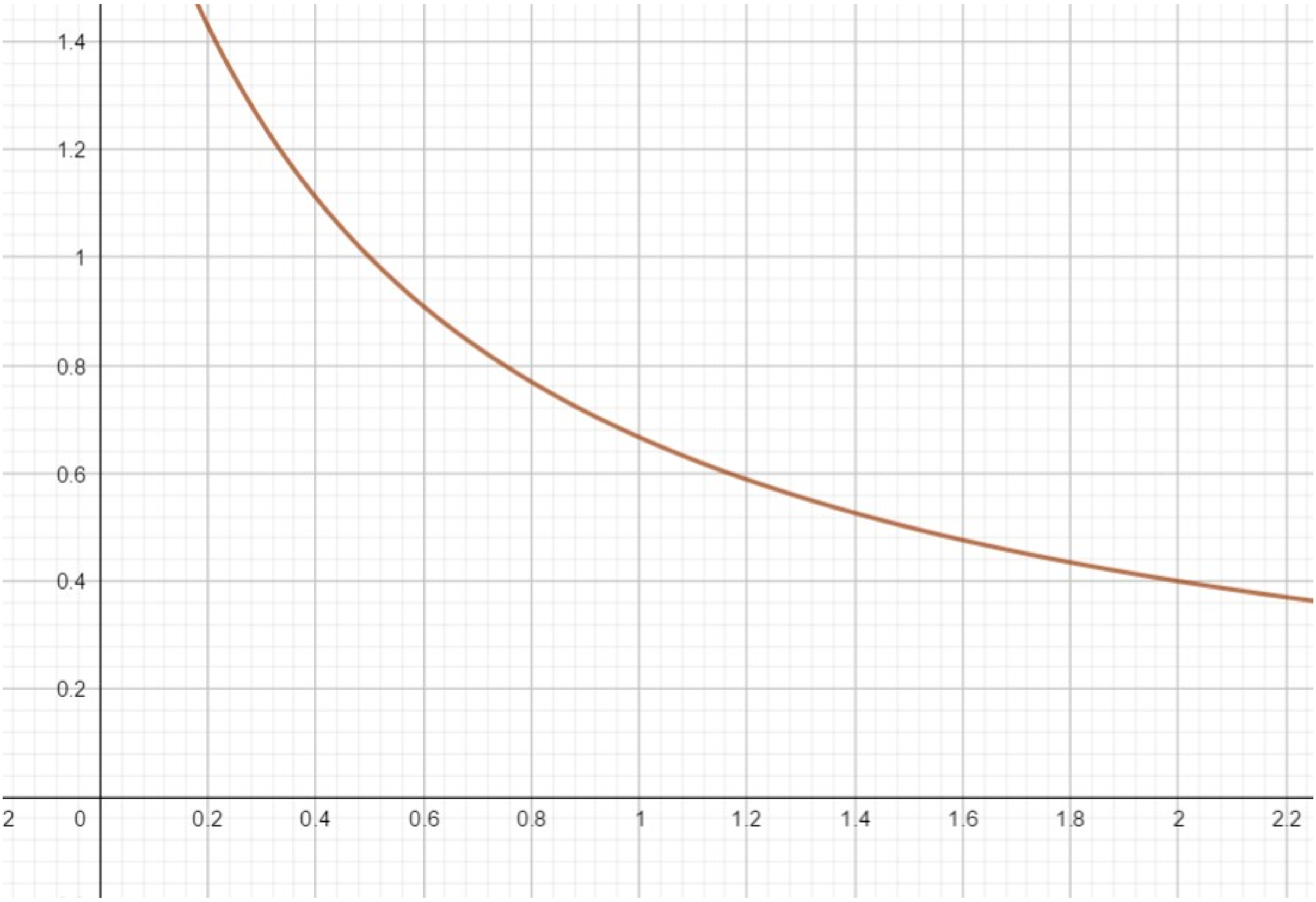
b) Déterminer une valeur approchée de u_{30} à 10^{-8} près

2) Compléter le programme afin qu'il affiche tous les termes de u_0 à u_n .

```
from math import *
def f(x):
  return(........................)
def termes(n):
  u=[1]
  for i in range(1,.........):
    u.append(...............)
  return(u)
```

Ex 5 : On considère la fonction f définie pour $x \neq -0{,}5$, par $f(x)=\dfrac{1}{x+0{,}5}$ (dont la représentation graphique est donnée ci-dessous) et la suite (u_n) , définie par $\begin{cases} u_0=0{,}2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

Représenter les premiers termes de la suite (u_n) sur les axes, puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).



Correction :

Ex 1 : Vrai ou faux (réponse juste : + 0,5 / réponse fausse : -0,5 / pas de réponse : 0)

1	Si $u_5>u_4>u_3>u_2>u_1>u_0$, alors (u_n) est strictement croissante.	Faux
2	Si (u_n) est positive, alors (u_n) est monotone.	Faux
3	Une suite croissante est toujours minorée.	Vrai
4	Une suite peut être à la fois croissante et majorée.	Vrai
5	Si une suite (u_n) est décroissante alors $u_{1000}>u_{100}>u_{10}$	Faux
6	Si une suite (u_n) est croissante alors $u_{-2}<u_{-1}$	Faux
7	Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=f(n)$. Si (u_n) est décroissante, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.	Faux
8	Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=f(n)$. Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est décroissante.	Vrai
9	Un suite qui vérifie pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$ est forcément croissante.	Faux
10	Une suite croissante peut avoir une limite égale à -1000.	Vrai

Ex 2 : 1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}-u_n=7n^2-6n+5$

$\Delta<0$, $7n^2-6n+5$ est du signe de $a=7$ donc $u_{n+1}-u_n>0$ et (u_n) est strictement croissante.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : fiche exercice

$$u_{n+1}-u_n=(\cancel{1^2}+2^2+\ldots+(n+1)^2)-(\cancel{1^2}+\cancel{2^2}+\ldots+n^2)=(n+1)^2>0$$

Il s'agit de sommes télescopiques

Donc (u_n) est strictement croissante.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2}{7^{n+1}}}{\frac{2}{7^n}}=\left(\frac{2}{7^{n+1}}\right)\left(\frac{7^n}{2}\right)=\frac{1}{7}<1$. Comme $u_n>0$, on a $u_{n+1}<u_n$ et (u_n) est donc strictement décroissante

Ex 3 : Dans chacun des cas, indiquer si la suite est minorée, majorée ou bornée.

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1 \Rightarrow 2\leqslant 3+(-1)^n\leqslant 4$ et $4\leqslant 5+(-1)^n\leqslant 6$

En multipliant membre à membre ces deux inégalités positives, on obtient :

$8\leqslant u_n\leqslant 24$

La suite est donc bornée

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a, clairement : fiche exercice

$0\leqslant u_n\leqslant 1$

Donc (u_n) est bornée.

Ex 4 :

1) a)

```
from math import *
def f(x):
  return(sqrt(x**2+5)-x)
def terme(n):
  u=1
  for i in range(1,n+1):
    u=f(u)
  return(u)
```

b) u_{30} 1.29099445à 10^{-8} près

2)

```
from math import *
def f(x):
  return(sqrt(x**2+5)-x)
def termes(n):
  u=[1]
  for i in range(1,n+1):
    u.append(f(u[i-1]))
  return(u).
```

Ex 5 :

La suite semble ni croissante, ni décroissante.

La suite semble tendre vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentant la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x+0,5}$ et la droite d'équation $y=x$.