

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Mise en bouche : Calculs en tout genre

Développer	Factoriser	Simplifier	Dériver
$A = (x^2 - 3x^3)^2$	$B = x(2x - 3)^2 + 4x - 6$	$C = \frac{11x(x - \sqrt{x})^4}{121\sqrt{x}(x - \sqrt{x})^3}$	$D = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

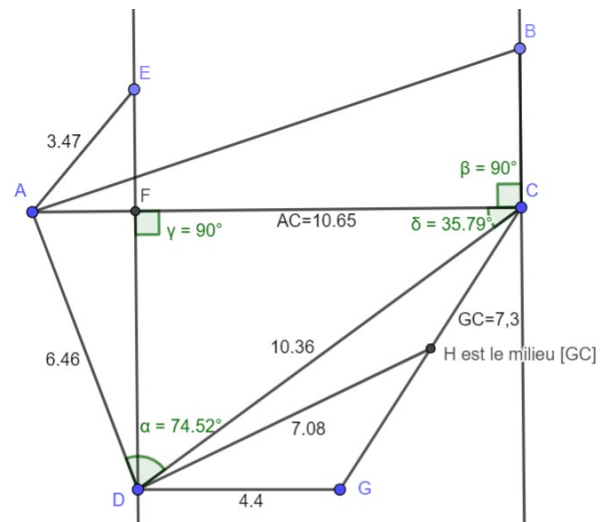
Ex 2 :

1) Par la méthode de votre choix, déterminer **les valeurs exactes** des produits scalaires ci-dessous :

$$\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DC} =$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} =$$



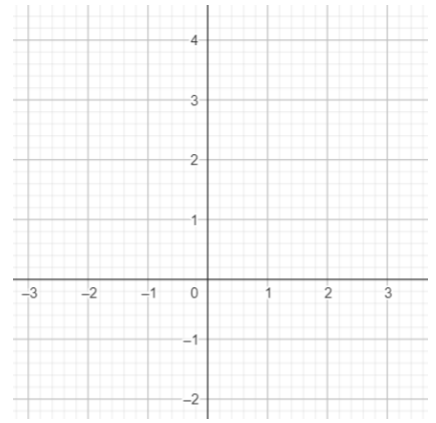
2) a) Que peut-on dire de $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC}$?

b) En déduire en expliquant la démarche utilisée **la valeur exacte** de $\cos(\widehat{FAE})$, puis une valeur approchée à 0,01 près en degré de $\widehat{FAE}$

Ex 3 : On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(-t, 1)$, $B\left(\frac{1-t^3}{1+t^2}, 3\right)$ et $C(t^3, t)$ où t est un réel quelconque.

1) Faire une représentation pour $t=0,6$ (valeurs approchées à 0,01 près pour les coordonnées)



2) Calculer t pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient orthogonaux.

Ex 4 : On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit les points $A(-3;-1)$ et $B(7;-5)$.

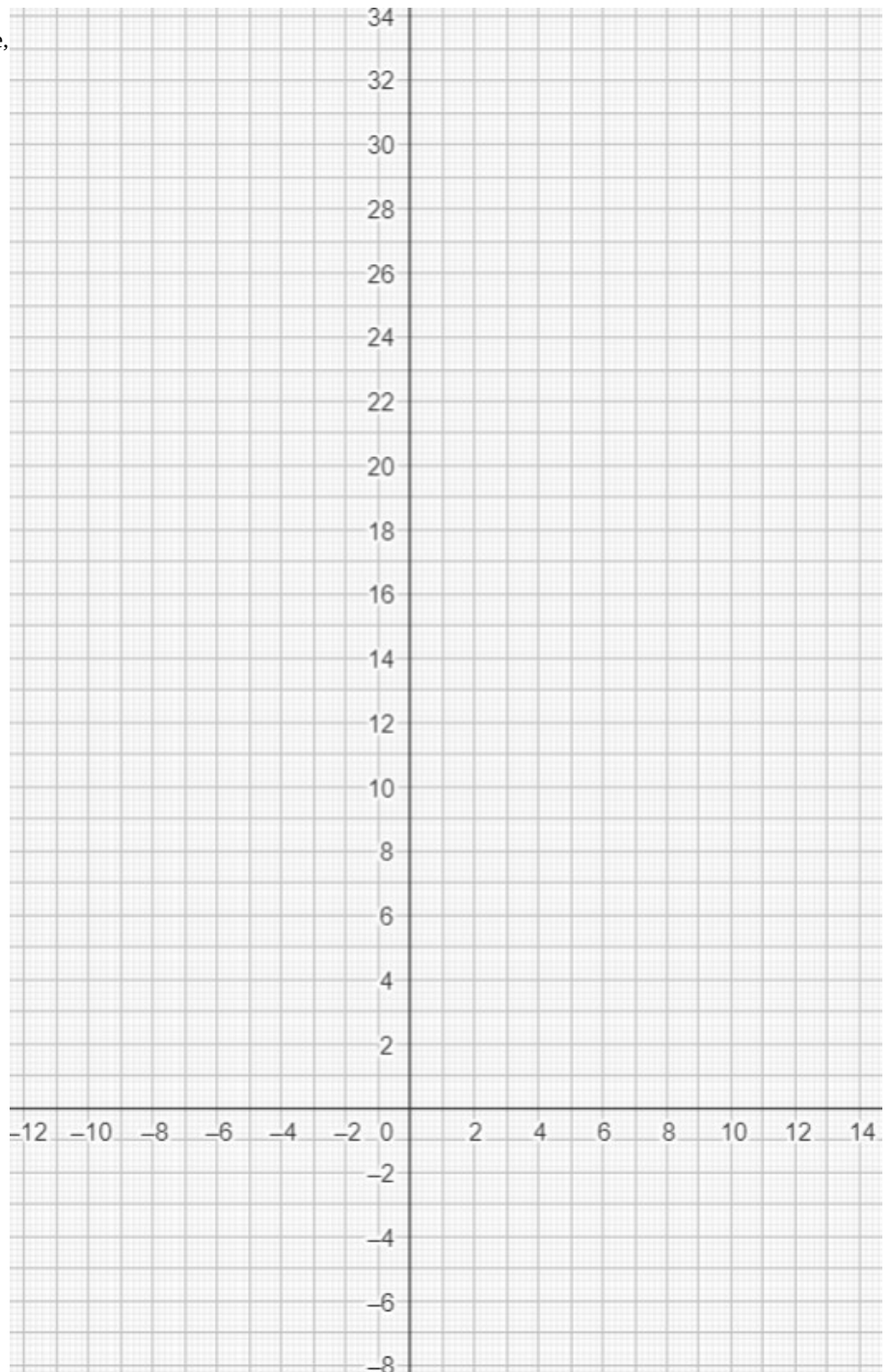
1) En introduisant le milieu I de [AB], exprimer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en fonction de IM et AB.

2) Déterminer l'ensemble F_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -13$

3) Soit F_2 l'ensemble des points M du plan tels que $-20 \leq \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leq -13$

a) Soit $C(4;0)$ et $D(0,-5)$. Les points C et D appartiennent-ils à l'ensemble F_2 ?

b) En utilisant les calculs de la question précédente, représenter l'ensemble F_2 .



4) On considère l'ensemble F_3 des points M du plan, tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -8\sqrt{29}$

a) Soit $E(\sqrt{29}, a\sqrt{29}+b)$. Trouver a et b , tels que E appartienne à F_3 ? Représenter E dans le repère précédent.

b) En expliquant la démarche utilisée , représenter l'ensemble F_3 . On note H le projeté orthogonal de M sur (AB).



Correction

Ex 1 : Calculs en tout genre

Développer	Factoriser	Simplifier	Dériver
$A = (x^2 - 3x^3)^2$ $A = x^4 - 6x^5 + 9x^6$	$B = x(2x - 3)^2 + 4x - 6$ $B = x(2x - 3)^2 + 2(2x - 3)$ $B = (2x - 3)(x(2x - 3) + 2)$ $B = (2x - 3)(2x^2 - 3x + 2)$ $\Delta < 0$, on ne peut donc pas factoriser davantage.	$C = \frac{11x(x - \sqrt{x})^4}{121\sqrt{x}(x - \sqrt{x})^3}$ $C = \frac{\sqrt{x}(x - \sqrt{x})}{11}$	$D = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ $D = \frac{(\sqrt{x} + 1)'(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)'}{(\sqrt{x} - 1)^2}$ $D = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2}$ $D = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2}$ $D = -\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}$

Ex 2 :

$$1) \quad \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DC}\|^2 - \|\overrightarrow{DG}\|^2 - \|\overrightarrow{DC}\|^2) = \frac{1}{2} ((2 \times 7,08)^2 - 4,4^2 - 10,36^2) = 36,908$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 = 113,4225$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \times AC \times \cos(\widehat{CAD}) = 6,46 \times 10,65 \times \cos(180 - 74,52 - 35,79) = 68,799 \times \cos(69,69) \approx 23,88$$

$$2) a) \quad \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 68,799 \times \cos(69,69) \quad (\text{E et D se projettent orthogonalement en F sur (AC)})$$

$$b) \quad \text{On a aussi} \quad \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = AE \times AC \times \cos(\widehat{FAE}) = 3,47 \times 10,65 \times \cos(\widehat{FAE}) = 36,9555 \times \cos(\widehat{FAE})$$

$$\text{Ainsi } 36,9555 \times \cos(\widehat{FAE}) = 68,799 \times \cos(69,69)$$

$$\text{Et } \cos(\widehat{FAE}) = 68,799 \times \frac{\cos(69,69)}{36,9555}$$

$$\text{Donc } \widehat{FAE} \approx 49,75^\circ$$

Ex 3 :

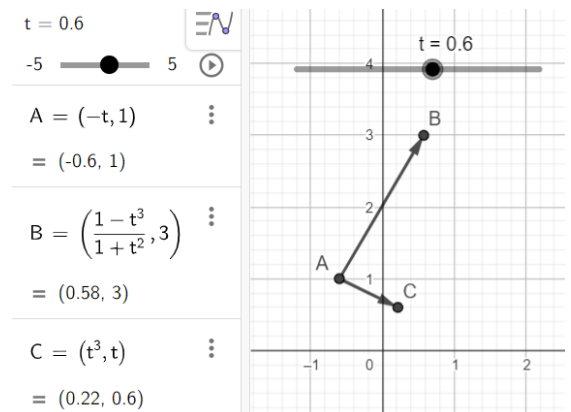
$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \left(\frac{t+1}{t^2+1}, \frac{t}{2} \right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \left(\frac{t^3+t}{t-1}, t \right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{t+1}{t^2+1} (t^3+t) + 2(t-1) = \frac{t+1}{t^2+1} \times t \times (t^2+1) + 2t - 2 = t(t+1) + 2t - 2 = t^2 + t + 2t - 2 = t^2 + 3t - 2$$

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

On trouve

$$\begin{aligned} & \text{solve}(t^2 + 3 \cdot t - 2 = 0, t) \\ & t = \frac{-(\sqrt{17} + 3)}{2} \text{ or } t = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \\ & \text{solve}(t^2 + 3 \cdot t - 2 = 0, t) \\ & t = -3.5615528 \text{ or } t = 0.56155281 \end{aligned}$$



Ex 4 :

$$1) \text{ On a : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = IM^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$2) \text{ On a } AB^2 = (7 - (-3))^2 + (-5 + 1)^2 = 10^2 + 4^2 = 116$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -13 \Leftrightarrow IM^2 - \frac{AB^2}{4} = -13 \Leftrightarrow IM^2 - 29 = -13 \Leftrightarrow IM^2 = 29 - 13 \Leftrightarrow IM^2 = 16 \Leftrightarrow IM = 4 \text{ avec } I(2; -3)$$

L'ensemble F_1 est donc le cercle de centre I et de rayon 4

$$3) \text{ a) } \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DA} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -21 + 5 = -16 \text{ et } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = -21$$

Ainsi $D \notin F_2$ et $C \in F_2$

$$\text{b) On obtient } -20 \leq IM^2 - 29 \leq -13 \Leftrightarrow 9 \leq IM^2 \leq 16 \Leftrightarrow 3 \leq IM \leq 4$$

F_2 est donc la couronne délimitée par les cercles de centre I de rayon 3 et de rayon 4.

$$4) \text{ On considère l'ensemble } F_3 \text{ des points M du plan, tels que } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -8\sqrt{29}$$

$$\text{a) On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} \sqrt{29}+3 \\ a\sqrt{29}+b+1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 10(\sqrt{29}+3) - 4(a\sqrt{29}+b+1) = (10-4a)\sqrt{29} + 26 - b$$

$$\text{Par identification avec } -8\sqrt{29}, \text{ on obtient : } \begin{cases} 10-4a = -8 \\ 26-4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{9}{2} \\ a = \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) On a } AB = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$\text{On a alors : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH \text{ (car } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} < 0)$$

$$\text{Ce qui donne : } 8\sqrt{29} = 2\sqrt{29} \times AH \Leftrightarrow AH = 4$$

Donc M est sur la droite perpendiculaire à (AB) passant par H, tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de sens contraire et $AH=4$.

La réciproque est évidente.

En effet, tout point de cette droite vérifie $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -AB \times AH = -8\sqrt{29}$.

On en déduit que l'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -8\sqrt{29}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

